

可換環の無限直積環のイデアル論

可換環の無限直積環のイデアルを完全に記述することは、有限直積の場合と比べて著しく複雑になりますが、「添字集合上のFilter」という概念を用いるのが最も優れた、そして標準的なアプローチです。

第1部：基本的なアプローチと全体像

1. べき等元と Boolean 代数を利用する

無限直積環 $R = \prod_{i \in \Lambda} R_i$ には、大量のべき等元 ($e^2 = e$ を満たす元) が存在します。

添字集合 Λ の任意の部分集合 $S \subseteq \Lambda$ に対して、次のような元 $e_S \in R$ を定義できます。

- $i \in S$ のとき、成分は 1
- $i \notin S$ のとき、成分は 0

これにより、添字集合 Λ の部分集合全体 (べき集合 $\mathcal{P}(\Lambda)$) と、環 R のべき等元の間には自然な対応が生まれます。この「Boolean 代数的な構造」が、イデアルを記述する骨格になります。

2. 体の無限直積の場合 (最も美しい例)

まず、各 R_i がすべて体 K である場合 ($R = K^\Lambda$) を考えると、本質がよく見えます。このとき、環 R のイデアル全体は、添字集合 Λ 上のFilter全体と1対1に対応します。

環 R の元 f に対して、その「ゼロ点集合」を $Z(f) = \{i \in \Lambda \mid f(i) = 0\}$ とします。イデアル $I \subseteq R$ が与えられたとき、それに属する元のゼロ点集合の集まり

$$\mathcal{F}_I = \{Z(f) \mid f \in I\}$$

を考えると、これは Λ 上の「Filter (正確には Ideal of subsets の双対)」になります。

- 極大イデアルの記述:** R の極大イデアルは、 Λ 上のUltrafilterと完全に1対1に対応します。
- この事実は、数理論理学やモデル理論における「Ultraproduct」の構成の基礎となっています。

第2部：一般の可換環と幾何学的視点

3. 直積で書けるイデアルとその限界

最も単純なイデアルの構成方法は、各成分環 R_i のイデアル I_i をそれぞれ取り、その直積を考えることです。

$$I = \prod_{i \in \Lambda} I_i$$

これも R のイデアルになります。しかし、 Λ が無限集合の場合、 R のイデアルは決してこれだけではありません。

例えば、有限個の成分でのみ非ゼロとなる元の全体 (直和)

$$\bigoplus_{i \in \Lambda} I_i$$

も R のイデアルですが、これは無限直積の形では書けません。一般のイデアル $J \subseteq R$ は、この直和と直積の間に無数に介在しており、成分ごとの情報だけでは完全に統制できない複雑な絡み合いを持っています。

4. Boolean 代数と Filter によるイデアルの統制

各成分環 R_i が自明でない冪等元を持たない（例：整域や局所環）と仮定すると、環 R の冪等元 ($e^2 = e$ を満たす元 e) の全体 E は、添字集合 Λ の部分集合全体がなす Boolean 代数 $\mathcal{P}(\Lambda)$ と同型になります。

任意のイデアル $J \subseteq R$ は、この Boolean 代数の中にイデアル $E_J = J \cap E$ を切り出します。これを Λ の部分集合の族として翻訳すると、特定の Filter を定義することになります。

Reduced product による構成

Λ 上の Filter \mathcal{F} と、各 R_i のイデアル I_i の族が与えられたとき、次のようなイデアルを構成できます。

$$J_{\mathcal{F}, \{I_i\}} = \{x \in R \mid \{i \in \Lambda \mid x_i \in I_i\} \in \mathcal{F}\}$$

これは **Reduced product** の核となる考え方であり、「 \mathcal{F} に属する（つまり十分に大きい）添字の集合上では、成分が I_i に落ちている」ような元の集まりです。

5. 素イデアルと極大イデアルの完全な分類

一般のイデアルの構造は混沌としていますが、**素イデアル (Prime ideal)** および **極大イデアル (Maximal ideal)** に限定すると、驚くほど美しく完全な分類が可能になります。この分類には **Ultrafilter** と **Ultraproduct** の概念が不可欠です。

$R = \prod_{i \in \Lambda} R_i$ の任意の極大イデアル \mathfrak{m} は、以下の2つのデータから完全に決定されます。

- Λ 上の Ultrafilter \mathcal{U}
- 各 R_i の極大イデアル M_i の族

具体的には、極大イデアル \mathfrak{m} は必ず以下の形をしています。

$$\mathfrak{m} = \{x \in R \mid \{i \in \Lambda \mid x_i \in M_i\} \in \mathcal{U}\}$$

素イデアルについても同様に、Ultraproduct $\prod_{i \in \Lambda} R_i / \mathcal{U}$ を経由することで完全に記述されます。

【数学的構造の分解】

任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subset R$ が与えられたとき、 R/\mathfrak{p} は整域です。したがって、 R の冪等元は 0 または 1 に写されます。この準同型によって、 Λ 上に自然に Ultrafilter \mathcal{U} が1つ確定します。

このとき、 \mathfrak{p} は必ず Ultraproduct への自然な射影の核 $J_{\mathcal{U}} = \{x \in R \mid Z(x) \in \mathcal{U}\}$ を含みます。これにより、次のような同型と対応が得られます。

- $R/J_{\mathcal{U}} \cong \prod_{i \in \Lambda} R_i / \mathcal{U}$ （これが Ultraproduct です）
- R の素イデアルのうち、Ultrafilter \mathcal{U} を誘導するものの全体は、Ultraproduct $\prod_{i \in \Lambda} R_i / \mathcal{U}$ の素イデアル全体と 1 対 1 に対応します。

6. $\text{Spec}(R)$ と Stone-Čech コンパクト化

上記の代数的な事実を幾何学的に解釈すると、**Stone-Čech コンパクト化** $\beta\Lambda$ の役割が極めて明白になります。離散位相を与えた添字集合 Λ の Stone-Čech コンパクト化 $\beta\Lambda$ の点は、 Λ 上の Ultrafilter 全体の集合と自然に同一視されます。

環 R の素スペクトル $\text{Spec}(R)$ について考えると、自然な連続全射が存在します。

$$\pi : \text{Spec}(R) \longrightarrow \beta\Lambda$$

この幾何学的描像によれば、一般の可換環の無限直積 R の素イデアル空間は次のように理解できます。

- ファイバーの構造:** 任意の Ultrafilter $\mathcal{U} \in \beta\Lambda$ 上のファイバー $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ は、Ultraproduct の素スペクトル $\text{Spec}(\prod R_i/\mathcal{U})$ と同相です。
- 主 Filter (孤立点) 上のファイバー:** \mathcal{U} が特定の添字 $k \in \Lambda$ によって生成される Principal ultrafilter である場合、そのファイバーは単に $\text{Spec}(R_k)$ に一致します。
- 境界部分 (非主 Filter):** $\mathcal{U} \in \beta\Lambda \setminus \Lambda$ (Non-principal ultrafilter) に対応する素イデアルたちが、無限直積特有の「直積の形をしていない」捉えどころのない素イデアル群の正体です。

第3部：さらに詳しい解説 (定義・証明・具体例)

ここからは、これまでの抽象的な議論を地に足のついたものにするため、厳密な定義、定理の証明、そして理解を劇的に深める具体例を提示します。

7. 厳密な定義

Filter と Ultrafilter の定義

集合 Λ 上の **Filter** \mathcal{F} とは、 Λ の部分集合の族 ($\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$) であり、以下の条件を満たすものです。

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$ かつ $\Lambda \in \mathcal{F}$ 。
- $A \in \mathcal{F}$ かつ $B \in \mathcal{F}$ ならば、 $A \cap B \in \mathcal{F}$ 。(有限交叉で閉じている)
- $A \in \mathcal{F}$ かつ $A \subseteq B \subseteq \Lambda$ ならば、 $B \in \mathcal{F}$ 。(上位集合で閉じている)

直感的には、Filter は「 Λ の中で『十分に大きい』とみなされる部分集合の集まり」を指定するルールです。

Ultrafilter (超フィルター) とは、極大な Filter のことです。同値な定義として、任意の $A \subseteq \Lambda$ に対して、 $A \in \mathcal{U}$ または $\Lambda \setminus A \in \mathcal{U}$ のどちらか一方が必ず成り立つような Filter \mathcal{U} を指します。

8. 定理と証明 (体の直積環における極大イデアル)

第1部で述べた、「体の無限直積の極大イデアルが Ultrafilter と 1 対 1 に対応する」という美しい事実を証明します。

定理:

K を体とし、 $R = K^\Lambda$ とする。 R の極大イデアル全体は、 Λ 上の Ultrafilter 全体と自然に一対一対応する。

証明:

ステップ1 (イデアルとべき等元の関係):

$f \in R$ を任意の元とする。 R において、元 $e \in R$ を次のように定義する。

$$e_i = \begin{cases} 1 & (f_i \neq 0) \\ 0 & (f_i = 0) \end{cases}$$

明らかに $e^2 = e$ であり、 e はべき等元である。また、 K が体であるため、 $g_i = 1/f_i$ (ただし $f_i \neq 0$ のときのみ。0のときは0) となる元 $g \in R$ をとると、 $f \cdot g = e$ となるため e は f の生成するイデアル (f) に属する。逆に $f \cdot e = f$ なので $f \in (e)$ である。すなわち、 R の任意のイデアルはその中に含まれるべき等元たちによって生成される。

ステップ2 (べき等元と部分集合の対応):

R のべき等元 e は、 Λ のある部分集合 A の指示関数 (Indicator function) に他ならない。これを e_A と書くことにする。 $e_A \in R$ のゼロ点集合 $Z(e_A)$ は、補集合 $\Lambda \setminus A$ である。

ステップ3 (イデアルから Filter への写像):

真のイデアル $I \subsetneq R$ に対して、族 $\mathcal{F}_I = \{Z(e) \mid e \in I, e^2 = e\}$ を考える。

- I は真のイデアルなので $1 \notin I$ 。ゆえに $Z(1) = \emptyset \notin \mathcal{F}_I$ 。
- $e_A, e_B \in I$ ならば、 $e_{A \cup B} = e_A + e_B - e_A e_B \in I$ であり、 $Z(e_{A \cup B}) = Z(e_A) \cap Z(e_B) \in \mathcal{F}_I$ 。
- $e_A \in I$ で $Z(e_A) \subseteq C$ となる $C \subseteq \Lambda$ があるとすると、 $B = \Lambda \setminus C$ とおくと $B \subseteq A$ 。このとき $e_B = e_B \cdot e_A \in I$ であり、 $Z(e_B) = C \in \mathcal{F}_I$ 。

したがって、 \mathcal{F}_I は Λ 上の Filter である。

ステップ4 (極大性と Ultrafilter) :

この対応 $I \mapsto \mathcal{F}_I$ は、包含関係を保つ全単射である。したがって、 R の極大イデアル \mathfrak{m} は、包含関係について極大な Filter、すなわち Ultrafilter \mathcal{U} に対応する。

9. 究極の具体例：超実数 (Hyperreals) の構成

可換環の無限直積の極大イデアルを考えることが、現代数学においてどれほど強烈な結果をもたらすかをお見せします。「超準解析 (Non-standard analysis)」で用いられる超実数体 (${}^*\mathbb{R}$) は、まさにこの理論から生まれます。

実数列の環 $R = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と非主イデアル

添字集合を自然数 $\Lambda = \mathbb{N}$ 、成分環をすべて実数体 $R_i = \mathbb{R}$ とします。環 $R = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は、「すべての実数列」がなす可換環です。

ここで、 R の中に次のようなイデアル I_0 を考えます。

$$I_0 = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in R \mid \text{ある番号 } N \text{ 以降、すべての } n \geq N \text{ で } a_n = 0\}$$

これは「有限個の項を除いてずっと 0 になる数列」の集合です。明らかに I_0 は真のイデアルです。この I_0 に対応する Filter は、Fréchet filter (補有限フィルター) $\mathcal{F}_{\text{cof}} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ が有限集合}\}$ です。

Zorn の補題により、 I_0 を含むような極大イデアル $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$ が存在します。この極大イデアルは、Fréchet filter を拡張した Non-principal ultrafilter (非主超フィルター) \mathcal{U} に対応しています。

極大イデアルによる剰余環：超実数体 ${}^*\mathbb{R}$

$\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$ は極大イデアルなので、その剰余環 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$ は体になります。これこそが、無限小や無限大を厳密に扱うことができる超実数体 ${}^*\mathbb{R}$ です。

$${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$$

この体 ${}^*\mathbb{R}$ では何が起きているのでしょうか？

- 定数列 (r, r, r, \dots) は、通常の実数 \mathbb{R} の元と同一視されます。
- 数列 $\omega = (1, 2, 3, 4, \dots)$ を考えます。任意の自然数 N に対して、 $\omega - (N, N, N, \dots)$ は有限個の項を除いて 0 にならない (つまり $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$ に属さない) ため、 ${}^*\mathbb{R}$ において $\omega > N$ となります。つまり、 ω はすべての実数より大きい「無限大の数」として振る舞います。
- 逆に、数列 $\varepsilon = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$ は、 ${}^*\mathbb{R}$ において 0 ではありませんが、どんな正の実数 $1/N$ よりも小さくなります。これが「無限小」の正体です。

このように、無限直積環における「捉えどころのない極大イデアル (非主超フィルター由来)」で割るという代数的操作が、微積分を厳密に再構築するための新しい「数」を創造するのです。